

令和6年 大学入試共通テスト（数学II・数学B）の略解と解説

一昨日 冗 著

注意： 答えは、赤文字 or 赤数字などで示す。解答の方法はいろいろあるので、私の解答に固執する必要はありません。あなたのやり方で解いてみてください。正解に行き着けばOKです。

また、与えられた問題文の図の中のカラーの線や数字・文字などは、著者が解答のためにかき入れたものです。

第1問. [1], (1) $k > 0, k \neq 1$ とする。関数 $y = \log_k x$ と $y = \log_2 kx$ について考えよう。

解答 (i) $y = \log_3 x$ のグラフは点 $(27, 3)$ を通る。また、 $y = \log_2 \frac{x}{5}$ のグラフは点 $(10, 1)$ を通る。

(ii) $y = \log_k x$ のグラフは、 k の値によらず定点 $(1, 0)$ を通る。

(iii) (グラフを下の図1から選ぶ問題) $k = 2, 3, 4$ のとき、 $y = \log_k x$ のグラフは ①, $y = \log_2 kx$ のグラフの概形は ⑤ である。

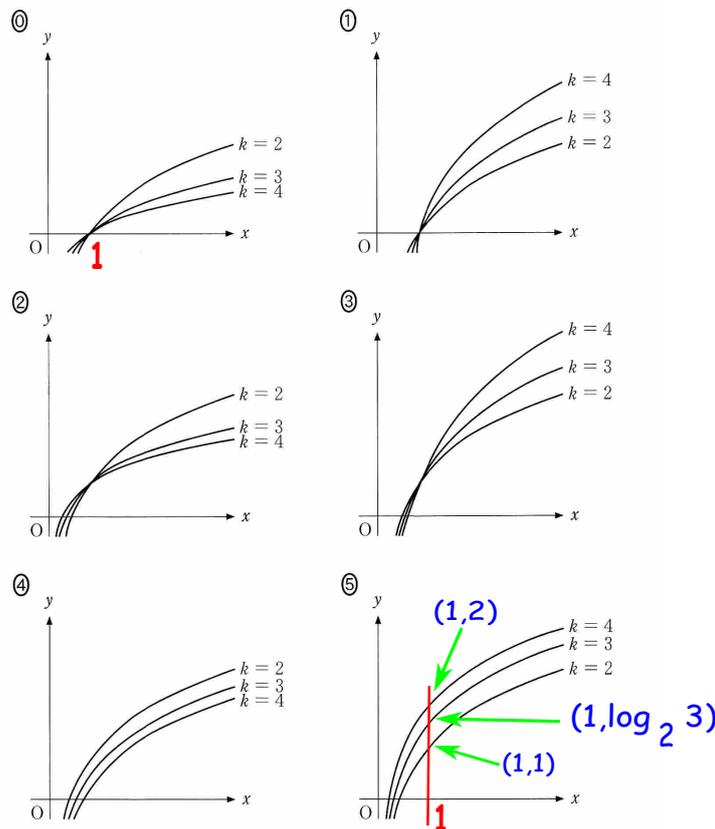


図1

(2) $x > 0, x \neq 1, y > 0$ とする。 $\log_x y$ について考えよう。

解答 (i) 座標平面において、方程式 $\log_x y = 2$ の表す図形を図示すると（この式は $y = x^2$ を表すので）、②の $x > 0, x \neq 1, y > 0$ の部分となる（下の図2から1つ選ぶ）。

(ii) 座標平面において、不等式 $0 < \log_x y < 1$ の表す領域を図示すると、②の斜線部分となる（下の図3から1つ選ぶ）。ただし、境界（境界線）は含まない。

なぜならば、 $0 < x < 1$ のとき、不等式 $\log_x 1 = 0 < \log_x y < 1 = \log_x x$ は真数の大小関係では、 $x < y < 1$ であり、 $x > 1$ のときは、真数の大小関係は $1 < y < x$ となるからである。

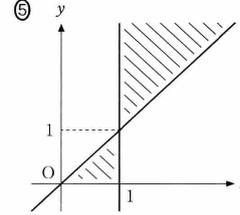
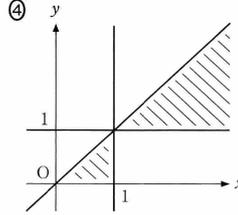
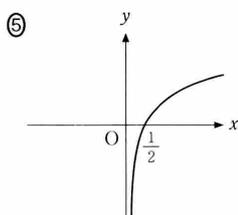
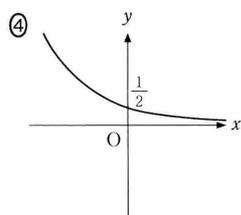
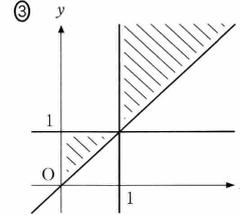
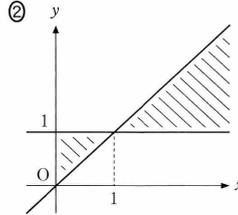
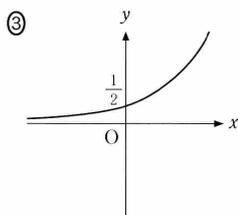
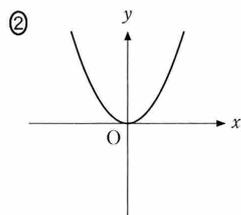
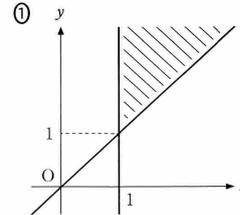
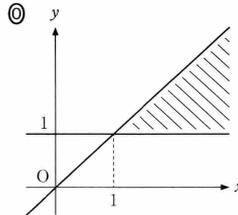
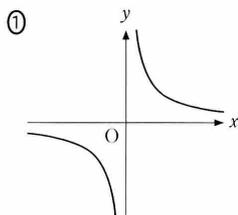
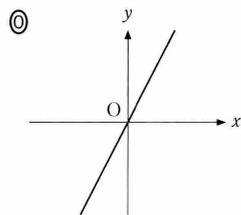


図2

図3

第1問. [2] $S(x)$ を x の2次式とする。 x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$, 余りを $U(x)$ とする。ただし、 $S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$, $S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。

解答 方程式 $S(x) = 0$ の解は $x = -2 \pm \sqrt{4-7} = -2 \pm \sqrt{3}i$ である。

また、 $T(x) = 2x - 1$, $U(x) = 12$ である (下の図4参照)。

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \\
 \hline
 x^2 + 4x + 7 \) 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5 \\
 \underline{2x^3 + 8x^2 + 14x} \\
 -x^2 - 4x + 5 \\
 \underline{-x^2 - 4x - 7} \\
 12
 \end{array}$$

図4

(2) 方程式 $S(x) = 0$ は異なる二つの解 α, β をもつとする。このとき $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えて見よう。

解答 仮定から、定数 k を用いて $U(x) = k$ とおける。このとき (下の解答群から1つを選ぶと), ③ である。

チ の解答群

- ① $P(a) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また、 $P(a) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $S(a) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる ← 最初からわかっている
- ② $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $P(a) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $S(a) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる ← これは仮定
- ③ $S(a) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また、 $S(a) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(a) = P(\beta) = k$ となることが導かれる
- ④ $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $S(a) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(a) = P(\beta) = k$ となることが導かれる

したがって、余りが定数になるとき、 $P(\alpha) = P(\beta)$ が成り立つ。

(ii) 逆に $P(\alpha) = P(\beta)$ が成り立つとき、余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから、 m, n を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。 $P(x)$ を $S(x), T(x), m, n$ を用いて表すと、 $P(x) = S(x)T(x) + mx + n$ となる。この等式の x に α, β をそれぞれ代入すると $P(\alpha) = m\alpha + n$ かつ $P(\beta) = m\beta + n$ となるので、 $P(\alpha) = P(\beta)$ と $\alpha \neq \beta$ より $m = 0$ ($\because m\alpha + n = m\beta + n \Leftrightarrow m(\alpha - \beta) = 0 \therefore m = 0$) となる。以上から余りが定数になることがわかる。

(i), (ii) の考察から方程式 $S(x) = 0$ が異なる 2 つの解 α, β をもつとき、 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha) = P(\beta)$ であることは同値である。

(3) p を定数とし、 $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$, $S(x) = x^2 - x - 2$ の場合を考える。

解答 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき、

$$S(x) = (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow \alpha = 2, \beta = -1, \text{ だから}$$

$$P(2) = 2^{10} - 2^{10} - 4p - 10 = -4p - 10, \dots \text{ ①}$$

$$P(-1) = 1 + 2 - p + 5 = 8 - p. \dots \text{ ②}$$

①=② より、 $p = -6$ となり、その余りは ② から、14 となる。

解説 [1] 対数関数や不等式に関する問題で、教科書の例題程度の問題なので、ほとんどの受験生はできたと思います。(1) の (i),(ii) はレベル 4, (iii) はレベル 3, (2) の **ク** はレベル 3, **ケ** はレベル 2 です。

[2] は整式の演算や余りの問題、方程式の解などが組み合わさったもので、教科書の例題などでよく見る問題でした。点がかせげたでしょう。(1) は全部レベル 3.5, (2) の **チ** 以降は全部レベル 2.5 です。

第 2 問. m を $m > 1$ を満たす定数とし、 $f(x) = 3(x - 1)(x - m)$ とする。また、

$S(x) = \int_0^x f(t)dt$ とする。関数 $y = f(x)$ と $y = S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1) $m = 2$ のとき、すなわち、 $f(x) = 3(x - 1)(x - 2)$ のときを考える。

解答) (i) $f'(x) = 0$ となる x の値は, $f'(x) = 6x - 9$ より, $x = \frac{3}{2}$ である。

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (3t^2 - 9t + 6)dt = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$$

であるから ($S'(x) = 0$ となるのは $x = 1, 2$ のとき, 1で極大値, 2で極小値をとる)

$x = 1$ のとき, $S(x)$ は極大値 $\frac{5}{2}$ をとり,

$x = 2$ のとき, $S(x)$ は極小値 2 をとることがわかる。

(iii) $f(3)$ と一致するものとして, 次の解答群のうち, 正しいものは ③ である。

($f(3) = S'(3) = 6$ である。下の書き込みも参照のこと)

ス の解答群

- ① $S(3)$ 定積分の値 $\frac{9}{2}$
- ② 2点(2, $S(2)$), (4, $S(4)$)を通る直線の傾き $S'(3)$ とは無関係
- ③ 2点(0, 0), (3, $S(3)$)を通る直線の傾き
- ④ 関数 $y = S(x)$ のグラフ上の点(3, $S(3)$)における接線の傾き
- ⑤ 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点(3, $f(3)$)における接線の傾き $f'(3) = 9$

(2) (ここ以降は全て解答群から答えを選ぶ問題)

$0 \leq x \leq 1$ の範囲で, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 , $1 \leq x \leq m$ の範囲で, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

解答) このとき, $S_1 = \int_0^1 f(x)dx$, $S_2 = \int_1^m \{-f(x)\} dx$, である。

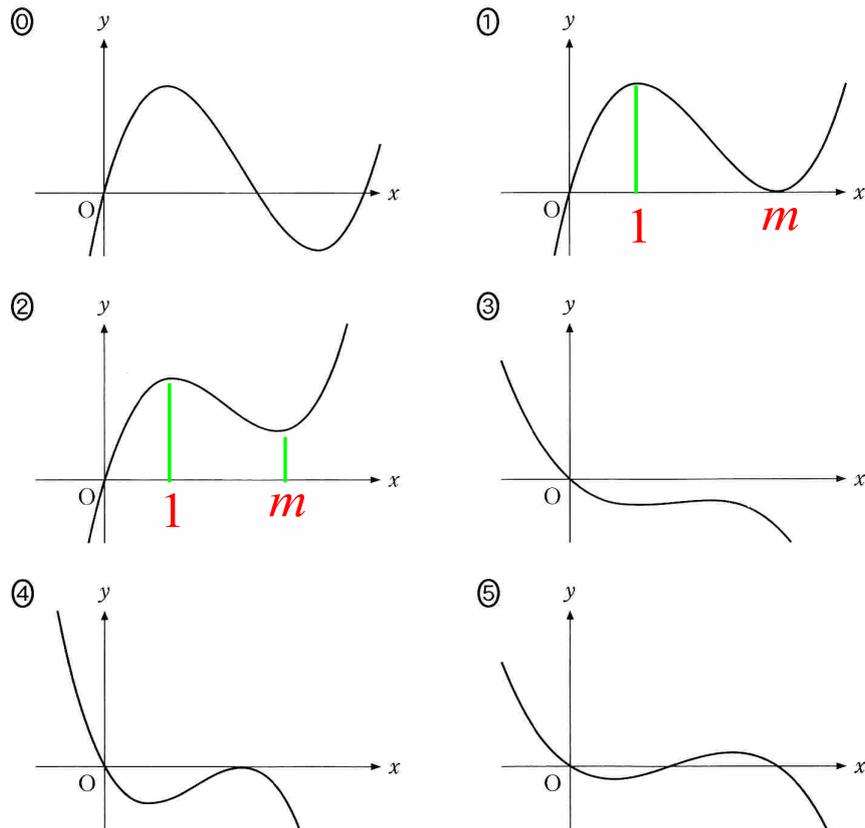
$S_1 = S_2$ となるのは,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^m \{-f(x)\} dx \text{ より, } \int_0^m f(x)dx = 0$$

のときであるから, $S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は, $x = 1$ で極大値をとり, そこから単調に減少して $x = m$ で極小値 0 をとるので, ① である (下図から選ぶ)。

また, $S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は, $x = 1$ で極大値, $x = m$ で正の極小値をとるので, ② である (下図から選ぶ)。

チ,ツ の解答群



(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y = S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

解答 関数 $y = f(x)$ のグラフは直線 $x = \frac{m+1}{2}$ に関して対称であるから、すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^1 f(x)dx = \int_m^{m+p} f(x)dx \quad \cdots \text{①}$$

が成り立ち、 $M = \frac{m+1}{2}$ とおくと $0 < q \leq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\}dx = \int_M^{M+q} \{-f(x)\}dx \quad \cdots \text{②}$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α, β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S(\beta) - S(\alpha)$$

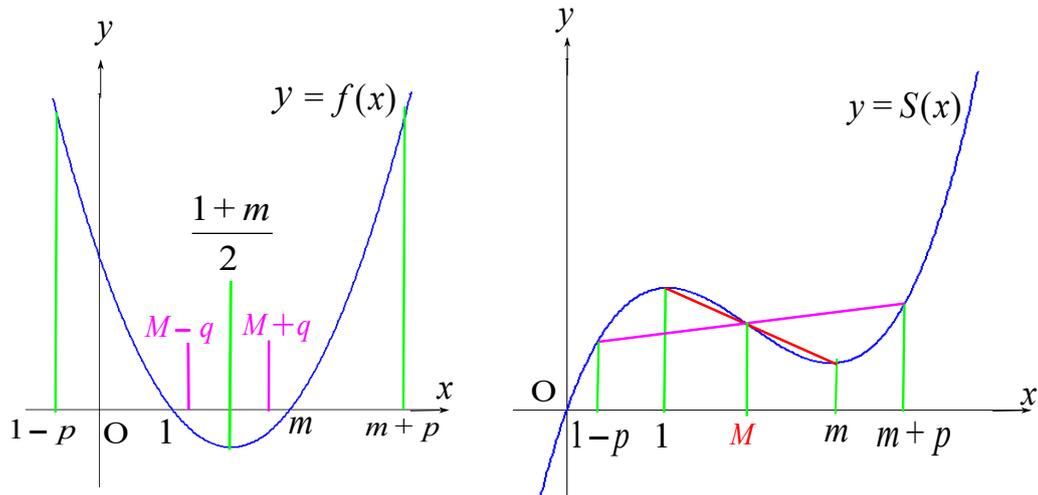
が成り立つことに注意すれば、① と ② はそれぞれ

$$S(1-p) + S(m+p) = S(1) + S(m), \quad \cdots \text{③}$$

$$2S(M) = S(M+q) + S(M-q) \quad \cdots \text{④}$$

となる。なぜならば、① と ② はそれぞれ次のようにかけるからである（下のグラフも参照せよ）。

$$S(1) - S(1-p) = S(m+p) - S(m), \quad S(M) - S(M-q) = S(M+q) - S(M).$$



以上から、すべての正の実数 p に対して、2点 $(1-p, S(1-p)), (m+p, S(m+p))$ を結ぶ線分の midpoint についての記述として、次の解答群のうち、最も適当なものは ② である。

ネ の解答群

- ① x 座標は p の値によらず一つに定まり、 y 座標は p の値により変わる。
- ② x 座標は p の値により変わり、 y 座標は p の値によらず一つに定まる。
- ③ 中点は p の値によらず一つに定まり、関数 $y = S(x)$ のグラフ上にある。
- ④ 中点は p の値によらず一つに定まり、関数 $y = f(x)$ のグラフ上にある。
- ⑤ 中点は p の値によって動くが、つねに関数 $y = S(x)$ のグラフ上にある。
- ⑥ 中点は p の値によって動くが、つねに関数 $y = f(x)$ のグラフ上にある。

なぜならば、2点の midpoint の x 座標は M であり、 y 座標は ③, ④ より、 $q = M - 1$ とおくと

$$\frac{S(1-p) + S(m+p)}{2} = \frac{S(1) + S(m)}{2} = \frac{S(M-q) + S(M+q)}{2} = S(M)$$

となるからである。

解説 微積分の基本に係わるいい問題でしたね。しかし、(2)以降はぜんぶ答えを選択する問題になっていて、面白くない(点を取りやすくなっている)ですね。(1)の(i)はレベル4, (ii)の ウ から キ はレベル3.5, ク から シ はレベル3, ス はレベル2.5ですね。

(2)の セ から タ はレベル2.5, チ, ツ はレベル2でしょう。

(3)の テ はレベル2.5, ト から ヌ はレベル2, ネ はレベル1.5でしょう。

第3問. (正規分布表の利用可の問題) 問題の中の晴れの定義については、気象庁の天気概況の「快晴」または「晴」とする。問題文の中の表は紙面の都合上一か所にまとめておいた。

(1) 太郎さんは、自分が住んでいる地域において、日曜日に晴れとなる確率を考えている。

晴れの場合は1, 晴れ以外の場合は0の値をとる確率変数を X と定義する。また、 $X = 1$ である確率を p とすると、その確率分布は表1のようになる。

解答 この確率変数 X の平均(期待値)を m とすると $m = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ となる。

太郎さんは、ある期間における連続した n 週の日曜日の天気を、表1の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本とみなし、それらの X を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で表すことにした。そして、その標本平均 \bar{X} を利用して、母平均 m を推定しようと考えた。実際に $n = 300$ として晴れの日数を調べたところ、表2のようになった。

第3問データ

表 3

表 1

X	0	1	計
確率	$1-p$	p	1

表 2

天気	日数
晴れ	75
晴れ以外	225
計	300

X_1	X_2	X_3	X_4	U_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

母標準偏差を σ とすると、 $n = 300$ は十分に大きいので、標本平均 \bar{X} は近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う（この結果はよく使うので覚えておいて下さい）。

一般に、母標準偏差 σ がわからないとき、標本の大きさ n が大きければ、 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてよいことが知られている。 S は

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - \bar{X}^2} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

で計算できる（この式もよく使うので覚えておいた方がいい）。なぜならば、 S の平方根の中の 2 乗和の式は

$$\begin{aligned} & (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \\ &= X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - 2(X_1\bar{X} + X_2\bar{X} + \dots + X_n\bar{X}) + n\bar{X}^2 \\ &= X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - 2\bar{X}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + n\bar{X}^2 \\ &= X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - n\bar{X}^2 \end{aligned}$$

となるからである。

ここで、 $X_1^2 = X_1$, $X_2^2 = X_2$, \dots , $X_n^2 = X_n$ であること（自分で納得すること）

に着目し、 $\textcircled{1}$ の右辺を整理すると、 $S = \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}$ と表されることがわかる。

よって、表 2 より、大きさ $n = 300$ の標本から求められる母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めよう。

標本の平均は $\frac{75}{300} = \frac{1}{4}$ だから、標本の標準偏差は、 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ となるので、

$$95\% \text{信頼区間は} \quad \frac{1}{4} - 1.96 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{300}} \leq m \leq \frac{1}{4} + 1.96 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{300}}$$

これを計算すると

$$0.201 = 0.25 - 0.049 = \frac{1}{4} - \frac{1.96}{40} \leq m \leq \frac{1}{4} + \frac{1.96}{40} = 0.25 + 0.049 = 0.299$$

となるので、答えは $0.201 \leq m \leq 0.299$ である。

(2) ある期間において、「ちょうど3週間続けて日曜日の天気が晴れになること」がどのくらいの頻度で起こり得るのかを考察しよう。以下では、連続する k 週の日曜日の天気について、(1)の太郎さんが考えた確率変数のうち X_1, X_2, \dots, X_k を用いて調べる。ただし、 k は3以上300以下の自然数とする。

X_1, X_2, \dots, X_k の値を順に並べたときの0と1からなる列において、「ちょうど三つ続けて1が現れる部分」をAとし、Aの個数を 確率変数 U_k で表す。例えば、 $k = 20$ とし、 X_1, X_2, \dots, X_{20} の値を順に並べたとき

$$1, 1, 1, 1, 0, \underline{1, 1, 1}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \underline{1, 1, 1}$$

AA

であったとする。この例では、下線部分はAを示しており、1が4つ以上続く部分はAとはみなさないので、 $U_{20} = 2$ となる。

$k = 4$ のとき、 X_1, X_2, X_3, X_4 のとり得る値と、それに対応した U_4 の値を書き出すと、表3のようになる。

ここで、 U_k の期待値を求めてみよう。(1)における p の値を $p = \frac{1}{4}$ とする。

解答) $k = 4$ のとき、 U_4 の期待値 $E(U_4)$ を求めよう。表3より、 $U_4 = 1$ となる確率は

$$2 \left(\frac{1}{4} \right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{128}, \quad U_4 = 0 \text{ となる確率は } \frac{125}{128}, \text{ だから}$$

$$E(U_4) = 0 \times \frac{125}{128} + 1 \times \frac{3}{128} = \frac{3}{128}$$

となる。また、 $k = 5$ のとき、 U_5 の期待値 $E(U_5)$ は次のように計算できる。

$U_5 = 1$ となる X_1, X_2, \dots, X_5 の数列をぜんぶあげよう。0を2つ含むものは

$$11100 \quad 01110 \quad 00111 \text{ の3つで、}$$

これらが起こる確率は $3 \times \left(\frac{1}{4} \right)^3 \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{27}{4^5}$,

0を1つ含むものは $11101 \quad 10111$ の2つで、これらが起こる確率は

$$2 \times \left(\frac{1}{4} \right)^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4^5}$$

これらの5つ以外の数列ではすべて $U_5 = 0$ だから、 U_5 の期待値は

$$E(U_5) = 0 \times \left(1 - \frac{33}{4^5} \right) + 1 \times \frac{33}{4^5} = \frac{33}{1024}$$

となる。

4以上の k について、 k と $E(U_k)$ の関係を詳しく調べると、座標平面上の点

$$(4, E(U_4)), (5, E(U_5)), \dots, (300, E(U_{300}))$$

は一つの直線上にあることがわかる (本当ですか?すごいことがわかっているんですね)。この事実によって、直線は

$$y = \left(\frac{33}{1024} - \frac{3}{128} \right) (x - 4) + \frac{3}{128} = \frac{9}{1024} (x - 4) + \frac{3}{128}$$

だから

$$E(U_{300}) = \frac{9 \cdot 296}{1024} + \frac{3}{128} = \dots = \frac{21}{8} \text{ となる。}$$

解説 易しそうだがけっこう扱いにくい問題でしたね。問題の意味を理解するのがけっこう難しかったと思われます。しかしながら、(1)は解答群から答えを選ぶ問題なので、**オ**以外は何とか正解に行き着けたかな。気になるのは、標本平均 \bar{X} の扱いですよ。これは確率変数なので、信頼区間の計算で式 **エ** に数値を代入して計算するとき、正しいのか否か迷うよね。

(2)の計算は確率を正確に求めないと難しいね。細かな計算があるので、計算ミスしやすいね。

ア はレベル3, **イ** はレベル2.5, **ウ**, **エ** はレベル2, **オ** はレベル1ですね。

カ はレベル1.5, **キク** はレベル1, **ケコ**, **サ** はレベル1.5ですね。

第4問. (1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+1} - a_n = 14$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。

解答 $a_1 = 10$ のとき, $a_2 = a_1 + 14 = 24$, $a_3 = a_2 + 14 = 38$ である。

数列 $\{a_n\}$ の一般項は、(公差14の等差数列だから) 初項 a_1 を用いて

$$a_n = a_1 + 14(n-1)$$

と表すことができる。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が $2b_{n+1} - b_n + 3 = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。

解答 数列 $\{b_n\}$ の一般項を初項 b_1 を用いて表そう。

与式は $2(b_{n+1} + 3) - (b_n + 3) = 0 \Leftrightarrow (b_{n+1} + 3) = \frac{1}{2}(b_n + 3)$ と表されるので

$$b_n + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 + 3). \quad \text{したがって} \quad b_n = (b_1 + 3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3$$

と表すことができる。

(3) 太郎さんは $(c_n + 3)(2c_{n+1} - c_n + 3) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) \dots ①

を満たす数列 $\{c_n\}$ について調べることにした。

解答 (i) ・数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_1 = 5$ のとき, $8(2c_2 - 5 + 3) = 0$ より, $c_2 = 1$ である。

・数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3 = -3$ のとき, $(c_2 + 3)(2 \cdot (-3) - c_2 + 3) = 0 \Leftrightarrow -(c_2 + 3)^2 = 0$ より, $c_2 = -3$ である。

このとき $(c_1 + 3)(-6 - c_1 + 3) = 0$ より, $c_1 = -3$ である。

(ii) 太郎さんは、数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3 = -3$ となる場合について考えている。 $c_3 = -3$ のとき, c_4 がどのような値でも $(c_3 + 3)(2c_4 - c_3 + 3) = 0$ が成り立つ。

解答

・数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3 = -3, c_4 = 5$ のとき

$$c_1 = -3, c_2 = -3, c_3 = -3, c_4 = 5, c_5 = 1$$

である。なぜならば, $8(2c_5 - 5 + 3) = 0$ より, $c_5 = 1$ となるからである。

・数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3 = -3, c_4 = 83$ のとき

$$c_1 = -3, c_2 = -3, c_3 = -3, c_4 = 83, c_5 = 40$$

である。なぜならば, $86(2c_5 - 83 + 3) = 0$ より, $c_5 = 40$ となるからである。

(iii) 太郎さんは (i) と (ii) から, $c_n = -3$ となることがあるかどうかに着目し, 次の命題 A が成り立つのではないかと考えた。

命題 A 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_1 \neq -3$ であるとする。このとき, すべての自然数 n について $c_n \neq -3$ である。

解答) 命題 A が真であることを証明するには、命題 A の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について ③ を示せばよい (数学的帰納法による証明で、下の解答群から選んだ)。

テ の解答群

- ① $c_2 \neq -3$ かつ $c_3 \neq -3$ であること
 - ② $c_{100} \neq -3$ かつ $c_{200} \neq -3$ であること
 - ③ $c_{100} \neq -3$ ならば $c_{101} \neq -3$ であること
 - ④ $n = k$ のとき $c_n \neq -3$ が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときも $c_n \neq -3$ が成り立つこと
 - ⑤ $n = k$ のとき $c_n = -3$ が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときも $c_n = -3$ が成り立つこと
- すべての n について $c_n \neq -3$ を示さない
- 命題 A の内容と異なる

実際、このようにして命題 A が真であることを証明できる。(読者は証明やってみてください)

(iv) 次の (I), (II), (III) は、数列 $\{c_n\}$ に関する命題である。

(I) $c_1 = 3$ かつ $c_{100} = -3$ であり、かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

(II) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = -3$ であり、かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

(III) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ であり、かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

解答) (I), (II), (III) の真偽の組合せとして正しいものは ④: 偽, 真, 真 である。なぜならば、(I) は命題 A に矛盾する。(II) はすべての $c_n = -3$ は解なので真である。(III) は (ii) で示したようにそのような解は存在するので真である。

解説) (1), (2) は漸化式についての普通の問題だったので、計算ミスがなければ満点とれたでしょう。しかし、(3) は へんてこな問題 だったね。初期値に対して解が一意に定まらない漸化式 ① は教科書や授業や問題集などではほとんど扱わないよね。という意味でなじみのない問題だったでしょう。だが、出題者の説明が沢山あったので、それほど難しくはなかったね。

今年の数学 1-A でも見られたが、オーソドックスでない問題が出される頻度が上がっているように思われます。出題者は特異な問題は避けた方がいいですね。オーソドックスな問題でいいですよ。

(1) はレベル 3.5, (2) は計算ミスしやすいのでレベル 1.5 かな。(3) の **サ** はレベル 3, **シス**, **セソ** はレベル 2.5, **タ** から **テ** まではレベル 2, 最後の **ト** はレベル 1.5 ですね。

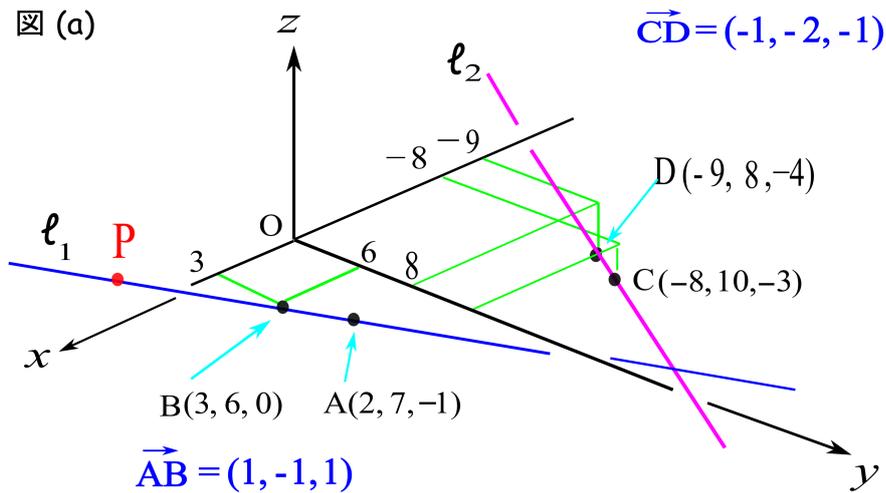
第 5 問. 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A (2, 7, -1), B (3, 6, 0), C (-8, 10, -3), D (-9, 8, -4) がある。A, B を通る直線を l_1 とし、C, D を通る直線を l_2 とする (下の図 (a) を参照)。

解答) (1) $\vec{AB} = (1, -1, 1)$ であり、 $\vec{CD} = (-1, -2, -1)$ だから

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -1 + 2 + -1 = 0 \text{ である。}$$

(2) 花子さんと太郎さんは、点 P が l_1 上を動くとき、 $|\vec{OP}|$ が最小となる P の位置について考えている。

解答) P が l_1 上にあるので、 $\vec{AP} = s\vec{AB}$ を満たす実数 s があり、 $\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB}$ が成り立つ。 $|\vec{OP}|$ が最小となる s の値を求めれば P の位置が求まる。このことについて、花子さんと太郎さんが話をしている。



花子： $|\vec{OP}|$ が最小となる s の値を求めればよいね。

太郎： $|\vec{OP}|$ が最小となるときの直線 OP と l_1 の関係に注目してもよさそうだよ。

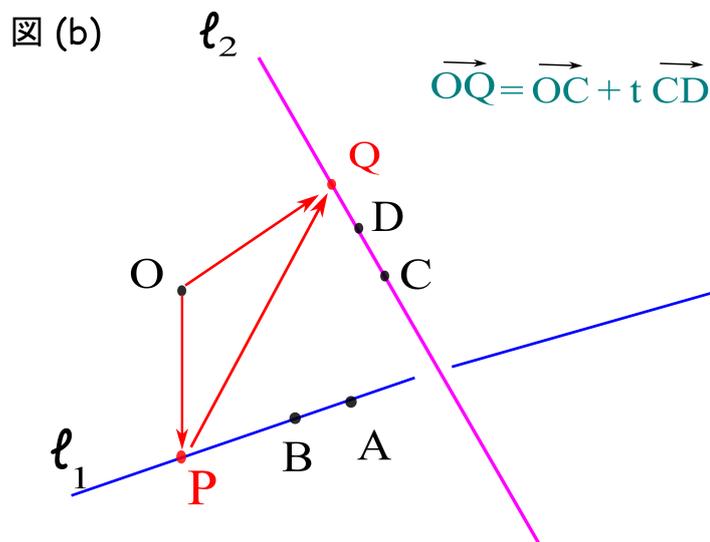
$$\vec{OP} = (2, 7, -1) + (s, -s, s) = (2 + s, 7 - s, s - 1) \quad \dots \text{①} \quad \text{だから,}$$

$$|\vec{OP}|^2 = \vec{OP} \cdot \vec{OP} = (2 + s)^2 + (7 - s)^2 + (s - 1)^2 = \dots = 3s^2 - 12s + 54 \quad \text{である。}$$

また、 $|\vec{OP}|$ が最小となるとき、直線 OP と l_1 の関係に着目すると $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$ が成り立つことがわかる。

花子さんの考え方でも、太郎さんの考え方でも、 $s = 2$ のとき $|\vec{OP}|$ が最小となることがわかる。例えば、太郎さんの考えだと、 \vec{OP} と \vec{AB} の内積が 0 なので、 $2 + s - (7 - s) + s - 1 = 0$ より $3s = 6$ となるので $s = 2$ を得る。

(3) 点 P が l_1 上を動き、点 Q が l_2 上を動くとする。このとき、線分 PQ の長さが最小になるような点 P と点 Q の座標を求めよ。



解答) $\vec{CQ} = t\vec{CD} = (-t, -2t, -t)$ とおくと、(上の図 (b) 参照)

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + (-t, -2t, -t) = (-8 - t, 10 - 2t, -3 - t) \quad \dots \text{②}$$

となる。これと \vec{OP} から

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (-s - t - 10, s - 2t + 3, -s - t - 2) \quad \text{となるので}$$

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}|^2 &= (-s-t-10)^2 + (s-2t+3)^2 + (-s-t-2)^2 = \dots = 3s^2 + 6t^2 + 30s + 12t + 113 \\ &= 3(s+5)^2 + 6(t+1)^2 + 32 \quad (\text{この計算がミソ, 問題はよくできている}) \end{aligned}$$

である。したがって $s = -5, t = -1$ のとき, $|\vec{PQ}|$ は最小値 $4\sqrt{2}$ をとる。

このとき, ①, ② より, 点 P の座標は $(-3, 12, -6)$, 点 Q の座標は $(-7, 12, -2)$ である。

解説 入試問題としては, よくできているいい問題ですね。私は空間の図をかきましたが, 図が正確に描けなくても計算は可能ですね。解答群から答えを選ぶ問題は, 解けない時でも, 正解にあたる確率が高いので, そんな問題作りはなるべく避けてほしいですね。

(1) はレベル 3, (2) の **カ** はレベル 3, **キ** から **ス** は, レベル 2.5, (3) はレベル 1.5 ですね。

【総評】 第 1 問と第 2 問が標準的な問題でやさしかったので, 全体としてはけっこうやさしい問題でした。超難問もなかったですね。入試問題の難易度としては, ちょっと物足りないという感じでした。平均点が 57.74 というのはちょっと低いですね。受験生の学力は数年前から比べると, けっこう落ちていると思います。

大学の入試問題では, なじみのない特異な問題(教科書や参考書などでほとんど扱わないもの)は, あまり出さない方がいいですね。今年の「数学 1-A」, と「この試験」では特異な問題が出されています。そんな問題は, 各大学が独自に実行する「2 次試験」で使えばいいと思いますよ。

設問ごとにレベルを付けてきたので, ここでまとめて見ます。

表 1. 難易度別の配点

レベル	第 1 問 対数関数 整式の計算 II	第 2 問 微積分の基礎 面積 II	第 3 問 確率 統計 B	第 4 問 数列 漸化式 B	第 5 問 空間ベクトル 距離 B
4~3.5	9	5		4	
3	8	4	2	1	7
2.5	10	8	2	2	9
2	3	11	3	6	
1.5		2	7	7	4
1			6		
合計	30	30	20	20	20

選択の問題で, (第 3 問と第 5 問) または (第 4 問と第 5 問) を選んだ時の得点の合計は, 難易度のレベルで考えると次のようになります。

	<第 3 問, 第 5 問を選択>	<第 4 問, 第 5 問を選択>
レベル 3 までできると	35 点	38 点
レベル 2.5 "	64 点	67 点
レベル 2 "	81 点	87 点
レベル 1.5 "	94 点	100 点

(第 3 問と第 4 問) の選択は上の場合よりもかなり点数が低くなったのではないかと思います。

この分布から推測すると、平均点程度できた学生は、レベル2.5の問題の4割くらいまでが正解できたという感じでしょうか。

大学の理系に進む学生には、レベル2の問題までは全部出来て欲しいですね。レベル2の問題は、高校の教科書がしっかりわかっているればできますよ。高校数学の教科書は、非常によくできています。わからないことがないくらい何べんも何べんも読んで、**公式や定理などを理解することが大切**です。教科書のどこに何が書いてあったかが記憶できる位繰り返して下さい。そして練習問題を解くことで、合格するだけの数学力が身につきますよ。問題が足りなかったら、やや難かしの問題集を買ってきて、独力で全部解いて見ることです。もし、わからない問題があったら、友人や先生に聞けばいいのです。**塾などに行かなくても、一人で十分な実力をつけることができますよ**。やってみて下さい。**Let ' s study and enjoy math.!!**

(4月5日(金) '24 完, おとといのジョー)